

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2022-2023 гг.

Первый этап

10 класс

Время написания работы 4 астрономических часа

Каждая задача оценивается в 7 баллов

10.1. Найти все решения в неотрицательных действительных числах системы уравнений $a(a+b) = b(b+c) = c(c+a)$.

10.2. Пусть A — множество из десяти различных положительных чисел (не обязательно натуральных). Определить максимально возможное количество арифметических прогрессий, состоящих из трёх различных чисел множества A .

10.3. Дана окружность Ω с центром O и окружность Ω' , которая проходит через O и пересекает Ω в точках A и B . На окружности Ω' выберем точку C , отличную от O , лежащую внутри Ω . Прямая AC ещё раз пересекает окружность Ω в точке D , а прямая BC ещё раз пересекает окружность Ω в точке E . Докажите, что треугольники ABC и CDE равны.

10.4. Рассмотрим все $7!$ семизначных чисел, получающихся из числа 1234567 всевозможными перестановками цифр. Сколько из них дают остаток 5 при делении на 7?

10.5. Сколько клеток нужно отметить на клетчатой доске 8 на 8 так, чтобы каждая клетка доски, включая отмеченные, была соседней по стороне с некоторой отмеченной клеткой? Найдите все возможные ответы. Считаем, что клетка не является соседней сама с собой.